ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡ/ΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΟΜΑΔΑ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ «ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ»

Θέμα Α

Α1. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 76

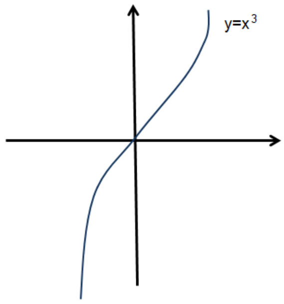
Α2. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 104

Α3. α. ψευδής

β. Έστω $f(x)=x^3$, x∈ℝ

Είναι f↑ℝ

και $f'(x)=3x^2\geq 0$



Α4.

α	β	γ	δ	ε
Λ	Σ	Σ	Σ	Σ

Θέμα Β

Β1. Η $f\circ g$ ορίζεται όταν: $D_{f\circ g}=\{x\in D_g : g(x)\in Df\}=\{x\in R : e^x>1\}=\{x\in R : x>0\}=(0,+\infty)$

και $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$, x>0

Β2. Έστω $h(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$, x>0

Για x_1, x_2, ∈(0,+∞) με $h(x_1)=h(x_2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1}=\dfrac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1}\Leftrightarrow (e^{x_1}+2)\cdot(e^{x_2}-1)=(e^{x_2}+2)\cdot(e^{x_1}-1)$

$\Leftrightarrow e^{x_1}\cdot e^{x_2}-e^{x_1}+2e^{x_2}-2=e^{x_2}\cdot e^{x_1}-e^{x_2}+2e^{x_1}-2$

$\Leftrightarrow -3e^{x_1}=-3e^{x_2}\Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} x_1=x_2$

Άρα η h είναι 1 – 1 κι αντιστρέψιμη.

Για την εύρεση της αντίστροφης:

έστω $y\in(0,+\infty)$, $h(x)=y$

$\Leftrightarrow e^x+2=y(e^x-1)\Leftrightarrow e^x-ye^x=-y-2\Leftrightarrow e^x(1-y)=-y-2$

$\Leftrightarrow e^x(1-y)=-y-2$

$\overset{y\neq 1}{\Rightarrow}$ με $\dfrac{y+2}{y-1}>0\Leftrightarrow y<-2$ ή $y>1\Leftrightarrow y>1$ και αφού $y>0$

$\Leftrightarrow e^x=\dfrac{-y-2}{1-y}=\dfrac{y+2}{y-1}\Leftrightarrow \ln e^x=\ln\dfrac{y+2}{y-1}\Leftrightarrow x=\ln\left(\dfrac{y+2}{y-1}\right)$, y>1

$\Leftrightarrow h^{-1}(y)=\ln\left(\dfrac{y+2}{y-1}\right)$, x>1, άρα $h^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right), x>1$

B3. Έστω $\Phi(x)=h^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$, x>1, φ παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων με

$$\Phi'(x)=\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)'=\frac{x-1}{x+2}\left(\frac{1(x-1)-1(x+2)}{(x-1)^2}\right)$$

$$=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x-1-x-2}{(x-1)^2}=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{-3}{(x-1)^2}<0 \text{ για } x>1$$

Άρα Φ γνησίως φθίνουσα στο$(1,+\infty)$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

B4. $\lim\limits_{x\to1^+}\Phi(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)=+\infty$

Διότι: έστω $u=\dfrac{x+2}{x-1}$ με $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+2}{x-1}=+\infty$ αφού x > 1, άρα και $\lim\limits_{x\to1^+}u=+\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\dfrac{x+2}{x-1})=0$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$

Θέμα Γ

Γ1. $D_f=(-\infty,\dfrac{3\pi}{2})$

Αφού f συνεχής, θα είναι συνεχής και στο $x_0=0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{1}{1-x}-\ln\lambda\right)=\lim\limits_{x\to0^+}(\eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x)$

$\Leftrightarrow 1-\ln\lambda=\lambda \Leftrightarrow \ln\lambda=1-\lambda \Leftrightarrow \ln\lambda+\lambda-1=0$ (I)

Έστω συνάρτηση $g(x)=\ln x+x-1$, $x>0$

Είναι $g'(x)=\frac{1}{x}+1>0$, $x>0$

Άρα g γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Η $g(x)=0$ έχει προφανή ρίζα το $x=1$, και αφού g ↑ στο $(0, +\infty)$ άρα και 1 - 1, αυτή είναι μοναδική.

Άρα η (I) έχει μοναδική λύση την $x=1$ και η f γίνεται:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x\le 0\\ \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x, & 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

Γ2. Αρκεί να δείξω ότι f παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

με $f'(0)=1=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$

Είναι $f(0)=1$ άρα $A(0,1)\in C_f$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1-1+x}{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{x}{1}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=1+0=1$$

Αφού $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Τότε } f'(0)=1\\ \text{Όμως } f'(0)=\varepsilon\varphi\omega\end{array}\right\}\varepsilon\varphi\omega=1 \underset{0\le\omega<\pi}{\Leftrightarrow} \omega=\frac{\pi}{4}\text{rad}$$

Όπου ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης στο A(0,1) με τον άξονα x′x.

Γ3. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ ως ρητή και στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ ως τριγωνομετρική, τα κρίσιμα σημεία αναζητούνται μεταξύ των εσωτερικών σημείων του $D_f=\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right)$ στο οποίο η $f'(x)=0$

Είναι:

με x<0, $f'(x)=\left(\dfrac{1}{1-x}\right)'=-\dfrac{1}{(1-x)^2}\cdot(1-x)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}>0$, οπότε δεν υπάρχουν κρίσιμα σημεία στο Δ_1 $(-\infty, 0]$

με x>0, $f'(x)=(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)'=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$

Λύνουμε τη $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x$

Αν συνx= 0⇒ ημx=0 Άτοπο από $\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1$, άρα συνx≠0

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=1$

$\underset{0<x<\frac{3\pi}{2}}{\Leftrightarrow} x=\dfrac{\pi}{4}$ ή $x=\pi+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{4}$

Άρα κρίσιμα σημεία είναι τα $B\left(\dfrac{\pi}{4},f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ ή $B\left(\dfrac{\pi}{4},2\sqrt{2}\right)$ και $\Gamma\left(\dfrac{5\pi}{4},f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\right)$ ή $\Gamma\left(\dfrac{5\pi}{4},-2\sqrt{2}\right)$

Θέμα Δ

Δ1. $f(x)=e^x+x^2-e^x-1$ $\qquad A_f=R$

Αφού f παραγωγίσιμη στο R, θέσεις πιθανών ακροτάτων είναι μόνο οι ρίζες της $f'(x)=0$.

$f'(x)=e^x+2x-e$

$f''(x)=e^x+2x>0$ για κάθε x∈R

Για x = 0, f′(0) = 1 – e <0 και για x = 1 f′(1) = 2 > 0

Επίσης f′ συνεχής στο [0,1] και f′(0) f′(1)<0, από Θ Bolzano υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$ και αφού f′↑, αυτό είναι μοναδικό

Αφού f′↑ℝ : $x<x_0 \Leftrightarrow f'(x)<f'(x_0)=0$ και $x>x_0 \Leftrightarrow f'(x)>f'(x_0)=0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
f′(x)	-	0	+
f	↘		↗

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=x_0\in(0, 1)$, το $f(x_0)=e^{x_0}+x_0^2-ex_0-1$

το οποίο είναι μοναδικό, αφού η $f'(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x_0 \in (0, 1)$.

Έχουμε $f(x_0) = e^{x_0} + {x_0}^2 - ex_0 - 1$

και $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$

Επομένως $f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1 = {x_0}^2 - (e+2)x_0 + e - 1$

Δ2.

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$ διότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ αφού f συνεχής στο x_0 και $f(x) - f(x_0) > 0$ για κάθε $x \neq x_0$, διότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μοναδικό στο x_0 και $f(x) > f(x_0)$ για κάθε $x \neq x_0$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)-f(x_0)} = +\infty$

Επίσης με $x \neq x_0$ ισχύουν $ημ(\dfrac{1}{x-x_0}) \geq -1$

$\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)} + ημ(\dfrac{1}{x-x_0}) \geq -1 + \dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}$ κι επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}(-1 + \dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}) = +\infty$ είναι και

$\lim\limits_{x\to x_0}[\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)} + \dfrac{1}{ημ(x-x_0)}] = +\infty$

Δ3.

$f(x) + x = x_0$, $x \in (x_0, 1)$

Έστω $g(x) = f(x) + x - x_0$, $x \in [x_0, 1]$

$g(x_0) = f(x_0)$

$g(1) = f(1) + 1 - x_0 = 1 - x_0 > 0$

Για το $f(x_0)$ ξέρουμε ότι $f(0) = e^0 + 0 - e - 1 = 0$

και f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$, $0 < x_0 < 1$

Είναι $0 < x_0 \Leftrightarrow f(0) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) < 0$

Αφού g συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων στο $[x_0, 1]$ και $g(x_0)g(1) < 0$, από θεώρημα Bolzano στο $[x_0, 1]$ υπάρχει τουλάχιστον μία λύση της εξίσωσης $g(x) = 0$, $x \in (x_0, 1)$

g γνησίως αύξουσα στο $[x_0, 1]$

Για τη μοναδικότητα: Είναι $g'(x) = f'(x) + 1 > 0$ αφού για $x > x_0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$ στο $(x_0, +\infty)$.

Άρα g γνησίως αύξουσα και 1 – 1. Συνεπώς η ρίζα είναι μοναδική στο $(x_0, 1)$.

Δ4.

Έστω ρ η ρίζα της $f(x) + x = x_0$, $\rho \in (x_0, 1)$.

Τότε $f(\rho) = x_0 - \rho$

Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) > f(\rho)\cdot f'(\kappa) + f(\rho) \Leftrightarrow f(x_0) - f(\rho) > f(\rho)\cdot f'(\kappa)$

Αφού $x_0 < \rho < 1$ και f γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$

$f(x_0) < f(\rho) < f(1) \Leftrightarrow f(\rho) < 0$

$$\overset{f(\rho)<0}{\Leftrightarrow} \frac{f(x_0) - f(\rho)}{f(\rho)} < f'(\kappa) \overset{f(\rho)<x_0-\rho}{\Leftrightarrow} \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa),\ \rho < \kappa < 1 \qquad (I)$$

Στο $\Delta_1 = [x_0, \rho]$ η f είναι συνεχής στο $[x_0, \rho]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, ρ).

Από θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (x_0, \rho)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_0) - f(\rho)}{(x_0 - \rho)}$ (II)

Αρκεί να δείξουμε ότι $f'(\xi) < f'(\kappa)$.

Είναι $x_0 < \xi < \rho <$ και από (I) f' γνησίως αύξουσα στο R

$f'(\xi) < f'(\kappa)$