ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Α) ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β)

ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΟΜΑΔΑ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ «ΕΞΕΛΙΞΗ»

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.65
β. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.65
γ. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.65

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.22

Α3.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Λ	Λ	Σ	Λ

ΘΕΜΑ Β

Οι αριθμοί είναι *14, 12, 18, 4α-1, 16*

Β1. Αν οι παρατηρήσεις ήταν διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά, αφού ν=5, θα ήταν $\delta=t_3=15$. Όμως, η τιμή 15 δεν είναι ανάμεσα στις δοσμένες, επομένως προκύπτει ότι 4α-1=15, από όπου έχουμε:
$4α-1=15 \Leftrightarrow 4α=16 \Leftrightarrow α=4$.

Β2. Για α=4, οι παρατηρήσεις διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά είναι:
12, 14, 15, 16, 18.

Η μέση τιμή αυτών είναι $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu}=\dfrac{12+14+15+16+18}{5}=\dfrac{75}{5}=15$

και για τη διακύμανση έχουμε:

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2}{\nu}=\frac{(12-15)^2+(14-15)^2+(15-15)^2+(16-15)^2+(18-15)^2}{5}$$

$$s^2=\frac{(-3)^2+(-1)^2+(0)^2+(1)^2+(3)^2}{5}=\frac{9+1+0+1+9}{5}=\frac{20}{5}=4$$

Επομένως, η ζητούμενη διακύμανση είναι $s^2=4$.

Β3. Για να εξετάσουμε το δείγμα ως προς την ομοιογένεια, χρειαζόμαστε το συντελεστή μεταβλητότητας CV_x

Είναι

$$s_x = +\sqrt{s^2} = 2$$

$$CV_x = \frac{s_x}{|\bar{x}|} = \frac{2}{15} > \frac{2}{20},$$

Επομένως το δείγμα είναι ανομοιογενές.

Β4. Έστω y_i, i=1, 2, …,5 οι νέοι αριθμοί.

Τότε θα είναι $y_i=-2x_i+5$, i=1, 2, …,5 , οπότε από βασική εφαρμογή του σχολικού βιβλίου σελ.99, θα είναι

$$\begin{cases} \bar{y} = -2\bar{x}+5 \\ s_y = |-2|s_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{y} = -2\cdot 15+5 \\ s_y = 2\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{y} = -25 \\ s_y = 4 \end{cases}$$

Ο νέος συντελεστής μεταβολής θα είναι

$$CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{4}{|-25|} = \frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 0{,}16$$

ΘΕΜΑ Γ

Είναι $f(x)=2x^3 - 3\kappa x^2 + \kappa$, $x\in\mathbb{R}$, $\kappa\in\mathbb{R}$

Γ1. Είναι $A_f = \mathbb{R}$

Αφού η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης *f* στο σημείο *M(1, f(1))* είναι παράλληλη στον άξονα x′x, θα ισχύει $\lambda=f'(1)=0$ (1).

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$f'(x) =(2x^3 - 3\kappa x^2 + \kappa)'= 6x^2 - 6\kappa x$, οπότε θα είναι

$f'(1)=6-6\kappa$ (2)

Από (1), (2) είναι $6-6\kappa=0 \Leftrightarrow \kappa=1$.

Επομένως θα είναι $f(x)=2x^3 - 3x^2 + 1$ και $f'(x) = 6x^2 - 6x$

Γ2. Ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x είναι το $f'(x)$.

Ζητάμε το x, ώστε να έχουμε το ελάχιστο της f′.

Είναι $f''(x) = (f'(x))' = (6x^2 - 6x)' = 12x - 6$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 12x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Το πρόσημο της f″ δίνει τη μονοτονία της f′ και φαίνεται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών.

x	$-\infty$		1/2		$+\infty$
f″(x)		–	0	+	
f′		↘		↗	

Η f′ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1/2]$, και γνησίως αύξουσα στο $[1/2, +\infty)$, επομένως η f′ εμφανίζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = \frac{1}{2}$.

Γ3. Έστω (ε) y=λx+β η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης ευθείας.

Αφού Α (–1, f′(–1)), τότε θα είναι

$\lambda = f''(-1) = 12(-1) - 6 = -12 - 6 = -18$, οπότε (ε) $y=-18x+\beta$

και $f'(-1) = 6(-1)^2 - 6(-1) = 6+6 = 12$, οπότε το δοθέν σημείο είναι το Α (–1, 12)

Αφού το Α είναι σημείο και της ευθείας, οι συντεταγμένες του θα την επαληθεύουν, οπότε θα είναι $12 = -18(-1) + \beta \Leftrightarrow 12 = 18 + \beta \Leftrightarrow \beta = -6$.

Τελικά, η ζητούμενη εξίσωση ευθείας είναι η (ε) $y=-18x-6$.

ΘΕΜΑ Δ

Είναι $f(x) = \sqrt{x^2+4} + 2018$, $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Είναι $A_f = \mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = (\sqrt{x^2+4} + 2018)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}(x^2+4)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

Δ2. Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} > 0 \underset{\sqrt{x^2+4}>0}{\Leftrightarrow} x > 0$$

Το πρόσημο της f′ δίνει τη μονοτονία της f και φαίνεται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f′(x)		–	0	+	
f		↘		↗	

Η f′ είναι γνησίως φθίνουσα στο (–∞, 0], και γνησίως αύξουσα στο [0, +∞), επομένως η f εμφανίζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$, το f(0) = $\sqrt{0+4}+2018=2+2018=2020$

Δ3. Ζητώ το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+4)f'(x)-2x}{x^2}$

Είναι

$$(x^2+4)f'(x)-2x=(x^2+4)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}-2x=(\sqrt{x^2+4})^2\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}-2x=\sqrt{x^2+4}\cdot x-2x=(\sqrt{x^2+4}-2)x$$

Επομένως το ζητούμενο όριο είναι το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x^2+4}-2)x}{x^2}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x^2+4}-2)x=0$

Με x «κοντά» στο x_o=0, έχουμε

$$\frac{(\sqrt{x^2+4}-2)x}{x^2}=\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}=\frac{(\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2)}{x\ (\sqrt{x^2+4}+2)}=\frac{(\sqrt{x^2+4})^2-2^2}{x(\sqrt{x^2+4}+2)}$$

$$=\frac{x^2+4-4}{x(\sqrt{x^2+4}+2)}=\frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+4}+2)}=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}$$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+4)f'(x)-2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x^2+4}-2)x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}=0$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΕΠΑ.Λ
Κεντρικό Διδακτήριο: Βασ. Αμαλίας 1 & Μιλτιάδου, Πλατεία ΗΣΑΠ Αμαρουσίου, 151 22 Μαρούσι
τηλ.-fax: 210 8028560, 210 6129412 • www.exelixi.edu.gr • info@ekpedefsi.gr