ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΛΑ Β)
ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΙΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡ/ΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΒΑΖΟΥΡΑ ΕΛΕΝΗ – ΕΛΛΗΝΙΚΑΚΗΣ ΝΙΚΟΣ – ΠΟΥΣΠΟΥΡΙΚΑΣ ΝΙΚΟΣ – ΤΑΜΙΑΣ ΑΝΤΩΝΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο , Σελ. 262

Α2. Σχολικό βιβλίο , Σελ. 141

Α3. Σχολικό βιβλίο , Σελ. 246 – 247

Α4. **α.** Λ
β. Σ
γ. Λ
δ. Σ
ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ με $x \in \mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή με

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2)'(x^2+1) - x^2(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Το πρόσημο της f′ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f′(x)		-	0	+	
f		↘		↗	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x = 0, το f(0) = 0.

Β2. Η f′ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή με

$$f''(x)=\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'=\frac{(2x)'(x^2+1)^2-x^2\left[(x^2+1)^2\right]'}{(x^2+1)^4}=\frac{2(x^2+1)^2-2x\cdot 2(x^2+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{2(x^2+1)^2-4x\cdot(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}=\frac{(x^2+1)\left[2(x^2+1)-8x^2\right]}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3}=\frac{-2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

Είναι $f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Το πρόσημο της f″ και η κυρτότητα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f″		−	0	+	0	−	
f							

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}]$ και στο $[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$ και είναι κυρτή στο $[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$ και έχει σημεία καμπής το $A(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4})$ και το $B(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4})$.

Β3. Αφού f συνεχής στο $\mathbb{R}$ η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$ και

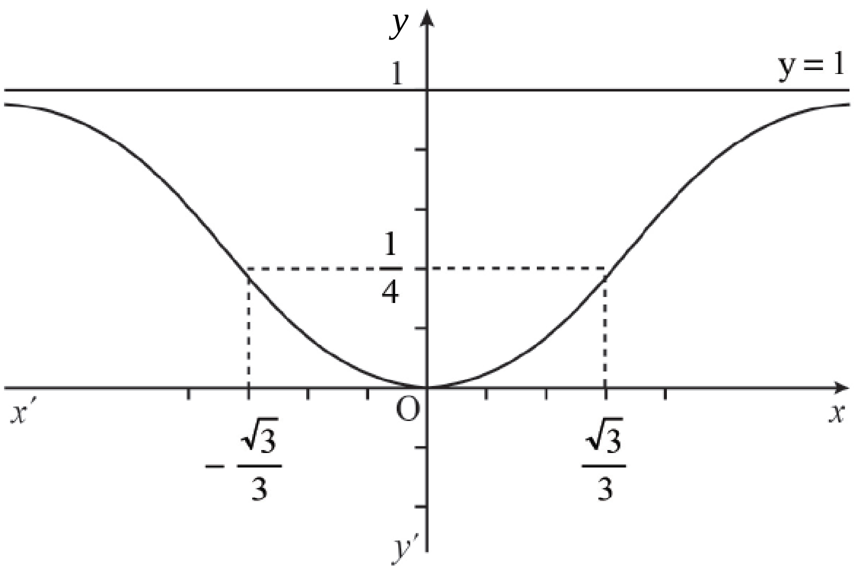
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Άρα η C_f έχει στο -∞ και στο +∞ οριζόντια ασύμπτωτη την y = 1 και δεν έχει πλάγιες.

B4.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
f	↘		↘		↗		↗



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η $e^{x^2}-x^2-1=0$ έχει προφανή ρίζα την x = 0.

Θεωρώ συνάρτηση g(x) = $e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$g'(x)=2e^{x^2}-2x^2=2x(e^{x^2}-1)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow 2x(e^{x^2}-1)=0 \Rightarrow x=0$ ή $e^{x^2}=1 \Rightarrow e^{x^2}=e^0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0.$

Είναι $e^{x^2}-1\geq 0\Leftrightarrow e^{x^2}\geq 1\Leftrightarrow e^{x^2}\geq e^0 \Leftrightarrow x^2\geq 0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Το πρόσημο της g′ και η μονοτονία της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
g	$\searrow$ +	0 (Ε)	$\nearrow$ +

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 = 0 το g(0) = 0. Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $g(x)\geq g(0)=0$.

Άρα η x = 0 είναι η μοναδική ρίζα.

Γ2. Είναι $f^2(x)=(e^{x^2}-x^2-1)^2$

Από (Γ1) είναι $g(x)\geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1)

Άρα η $f^2(x)=(e^{x^2}-x^2-1)^2$

$\Rightarrow |f(x)|=|e^{x^2}-x^2-1|$

f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με μοναδική ρίζα την x = 0.

Άρα η f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα (-∞, 0), (0, +∞).

Συνεπώς, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν f(x) > 0 στα (-∞, 0), (0, +∞) τότε $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- Αν f(x) < 0 στα (-∞, 0), (0, +∞) τότε $f(x) = -e^{x^2} + x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- Αν f(x) > 0 στο (-∞, 0) και f(x) < 0 στο (0, +∞) τότε

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x < 0 \\ -e^{x^2} + x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

- Αν f(x) < 0 στο (-∞, 0) και f(x) > 0 στο (0, +∞) τότε

$$f(x) = \begin{cases} -e^{x^2} + x^2 + 1, & x < 0 \\ e^{x^2} - x^2 - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Γ3. Είναι $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων με

$f'(x) = 2xe^{x^2} - 2x$

Η f′ είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων με

$f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} - 2$

$f''(x) = e^{x^2}(4x^2 + 2) - 2$

Είναι

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 2xe^{x^2}(4x^2 + 2) + e^{x^2}8x \\ &= e^{x^2}(8x^3 + 4x + 8x) \\ &= e^{x^2}(8x^3 + 12x) \\ &= xe^{x^2}(8x^2 + 12) \end{aligned}$$

με x > 0 $xe^{x^2}(8x^2 + 12) < 0$ άρα $f'''(x) < 0$

με x < 0 $xe^{x^2}(8x^2 + 12) > 0$ άρα $f'''(x) > 0$

Επομένως

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'''(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$\searrow$ $+$	0	$+$ $\nearrow$	
f		$\cup$	0	$\cup$	

Για $x < 0 \overset{f''\downarrow}{\Rightarrow} f''(x) > f''(0) = 0$

Για $x > 0 \overset{f''\uparrow}{\Rightarrow} f''(x) > f''(0) = 0$

Άρα f κυρτή στο $\mathbb{R}$

Γ4. Θεωρώ συνάρτηση την $g(x) = f(x + 3) - f(x)$, $x \in [0,+\infty)$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, αφού $f(x+3)$ παραγωγίσιμη ως σύνθετη παραγωγίσιμων,

με $g'(x) = f'(x+3) - f'(x) > 0$ αφού

Για κάθε $x \geq 0 \Rightarrow x + 3 > x \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x+3) > f'(x)$

$\Rightarrow f'(x+3) - f'(x) > 0$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα και 1 – 1.

Οπότε η εξίσωση $f(|ημx|+3) - f(|ημx|) = f(x+3) - f(x)$

γίνεται ισοδύναμα $g(|ημx|) = g(x) \overset{g\text{"}1-1\text{"}}{\Leftrightarrow} |ημx| = x$

$x \geq 0 \Rightarrow |ημx| = |x|$

$\Rightarrow x = 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]ημx dx = \pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)ημx dx + \int_0^{\pi} f''(x)ημx dx = \pi$

$\Rightarrow \int_0^{\pi} f(x)(-συνx)'dx + \int_0^{\pi}(f'(x))'ημx dx = \pi$

$\Rightarrow \left[-f(x)συνx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)(-συνx)dx + \left[f'(x)ημx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)(ημx)'dx = \pi$

$\Rightarrow \left[-f(x)συνx\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f'(x)συνx dx + \left[f'(x)ημx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)συνx dx = \pi$

$\Rightarrow \left[-f(x)συνx\right]_0^{\pi} + \left[f'(x)ημx\right]_0^{\pi} = \pi$

$-f(\pi)(-1) - (-f(0)\cdot 1) = \pi \Leftrightarrow f(\pi) + f(0) = \pi \qquad (1)$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{ημx}=1$

Με x κοντά στο $x_0 = 0$, θεωρώ συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{ημx}$ με $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$

Είναι $f(x) = g(x)ημx$ άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}[g(x)ημx] = 1\cdot 0 = 0$

Αφού f συνεχής στο $\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

Άρα $f(0) = 0$ (2)

Η $(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} f(π) = π$

Ζητάμε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{(2)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)ημx}{x} = \lim\limits_{x\to 0} g(x)\dfrac{ημx}{x} = 1\cdot 1 = 1$

Άρα $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$

Δ2. **α)** Έστω ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ στο οποίο η f να παρουσιάζει ακρότατο

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in\mathbb{R}$ από Θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(x_0) = 0$ (1)

Είναι $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$, $x\in\mathbb{R}$ οπότε παραγωγίζοντας έχουμε:

$e^{f(x)}f'(x) + 1 = f'(f(x))f'(x) + e^x$

θέτω όπου $x = x_0$

$e^{f(x_0)} f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0))f'(x_0) + e^{x_0} \Leftrightarrow e^{x_0} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$;Άτοπο αφού $f'(0)=1$ από Δ1 (θα έπρεπε $f'(0) = 0$ για να είναι ακρότατο).

Άρα δεν υπάρχει ακρότατο

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $f'(x) > 0$, $x\in\mathbb{R}$

Από το (α) είναι $f'(x) \neq 0$, $x\in\mathbb{R}$

Αφού η f′ είναι συνεχής, διατηρεί πρόσημο

Άρα $f'(x) > 0$, $x\in\mathbb{R}$ ή $f'(x) < 0$, $x\in\mathbb{R}$

γνωρίζουμε ότι $f'(0) = 1 > 0$

Άρα $f'(x) > 0$, για $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως, f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Είναι $\left|\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right| \le \left|\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}\right| + \left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right| \le \dfrac{1}{|f(x)|} + \dfrac{1}{|f(x)|} = \dfrac{2}{|f(x)|}$

Άρα $\left|\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right| \le \dfrac{2}{|f(x)|} \Leftrightarrow$

$-\dfrac{2}{|f(x)|} \le \left|\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right| \le \dfrac{2}{|f(x)|}$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{|f(x)|}\right) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{|f(x)|}\right)$

Αυτό γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και συνεχής οπότε

$f(\mathbb{R}) = (\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x))$ και αφού $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$.

Δ4. Α΄ Τρόπος

Είναι $\int_1^{\pi}\dfrac{f(\ln x)}{x}dx = \int_1^{e^{\pi}} f(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}dx = \int_1^{e^{\pi}} f(\ln x)(\ln x)'dx$

Για $u = \ln x$ είναι $du = \dfrac{1}{x}dx$

και για $x=1$, $u=0$

$x=e^{\pi}$, $u=\pi$

Άρα $\int_1^{e^{\pi}} f(\ln x)\dfrac{1}{x}dx = \int_0^{\pi} f(u)du$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $0 < \int_0^{\pi} f(u)du < \pi^2$.

Από Δ2 β) η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για $0 \le x \le \pi$ είναι

$f(0) \le f(x) \le f(\pi)$ και αφού $f(0) = 0$ είναι $0 \le f(x) \le f(\pi)$.

Από $f(x) \ge 0 \Rightarrow \int_0^{\pi} f(x)dx > 0$, (A)

αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και δεν είναι παντού 0.

Από $f(\pi) \ge f(x) \overset{\Delta 1}{\Rightarrow} f(x) \le \pi \Rightarrow \pi - f(x) \ge 0$. Αφού η f δεν είναι παντού μηδέν

$\Rightarrow \int_0^{\pi}(\pi - f(x)) - dx > 0 \Rightarrow \int_0^{\pi}\pi dx > \int_0^{\pi} f(x)dx \Rightarrow \pi(\pi-0) > \int_0^{\pi} f(x)dx$

$\Rightarrow \int_0^{\pi} f(x)dx < \pi^2$ (B)

Από (A), (B) έπεται $0 < \int_0^{\pi} f(x)dx < \pi^2$.

Β΄ Τρόπος

Είναι $1 \le x \le e^{\pi} \overset{\ln x \nearrow}{\Rightarrow} \ln 1 \le \ln x \le \ln e^{\pi}$

$\Rightarrow 0 \le \ln x \le \pi \overset{f \nearrow}{\Longrightarrow} f(0) \le f(\ln x) \le f(\pi)$

$\Rightarrow 0 \le f(\ln x) \le \pi \overset{x>0}{\Rightarrow} 0 \le \dfrac{f(\ln x)}{x} \le \dfrac{\pi}{x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f(\ln x)}{x} \ge 0 \quad (1) \\ \text{και} \\ \dfrac{\pi}{x} - \dfrac{f(\ln x)}{x} \ge 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx \ge 0$$

και $\overset{(2)}{\Rightarrow} \displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \left(\frac{\pi}{x} - \frac{f(\ln x)}{x}\right)dx \ge 0$

$$\Rightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx \le \pi \cdot [\ln x]_1^{e^{\pi}} = \pi^2$$

Η f δεν είναι παντού μηδέν άρα $0 < \displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi^2$.