ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ &
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡ/ΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΟΜΑΔΑ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ «ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ»

ΘΕΜΑ Α

Α1. σελ. 135, σχολικό βιβλίο

Α2. σελ. 51, σχολικό βιβλίο

Α3. σελ. 23, σχολικό βιβλίο

Α4. **α)** Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(x+1)=(x+1)\cdot e^{-x}$

$u=x+1 \Leftrightarrow x=u-1$

$f(u)=u\cdot e^{1-u}, \quad u\in\mathbb{R}$

$f(x)=x\cdot e^{1-x}$

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις μεταξύ παραγωγισίμων συναρτήσεων.

$f'(x)=e^{1-x}-x\cdot e^{1-x}=(1-x)e^{1-x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	+	0	-
f	↗		↘

$f(1)=1$

Αφού η $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ και f συνεχής στο $(-\infty, 1]$, τότε f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$

και

Αφού η $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ και f συνεχής στο $[1, +\infty)$ τότε f γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$

Η f εμφανίζει ολικό μέγιστο x=1, το f(1)= 1·e1-1 =1.

B3. Είναι $f''(x) = -e^{1-x} - (1-x)\cdot e^{1-x}$

$= e^{1-x}(-1-1+x)$

$= e^{1-x}(x-2)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

		2	
f''	-	0	+
f	$\cap$		$\cup$

Σ.Κ.

(2,f(2))

$\left(2, \frac{2}{e}\right)$

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$ και εμφανίζει σημείο καμπής στο

$A\left(2, \frac{2}{e}\right)$

Η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{1-x} \underset{u\to-\infty}{\overset{u=1-x}{=\!=}} \lim_{u\to-\infty} e^{u} = 0 = \lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{1-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-1}} \underset{\text{dLH}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=\!=}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0$$

Άρα $y = 0$ (δηλ $x'x$) οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{1-x} \underset{u\to+\infty}{\overset{u=1-x}{=\!=}} \lim_{u\to+\infty} e^{u} = +\infty$$

Άρα η C_f δεν έχει πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο -∞

B4. (i) Είναι Δ1 = (–∞ , 1] και αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ1, θα έχουμε :

$$\Delta_1 = (-\infty, 1] \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(\Delta_1) = (\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)]$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{1-x} \overset{(-\infty)(+\infty)}{=} -\infty$$

$$f(\Delta_1) = (-\infty, 1]$$

$$\Delta_2 = (1, +\infty) \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(\Delta_2) = (\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 1^+} f(x))$$

$$f(\Delta_2) = (0, 1)$$

$$f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = (-\infty, 1]$$

(ii)

Αν $\lambda < 0$: $\lambda \in f(\Delta_1)$, άρα $\exists x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο ώστε

$f(x_1) = \lambda$ και αφού $f \uparrow \Delta_1 \Rightarrow x_1 =$ μοναδικό

Αν $\lambda = 0$: $\lambda \in f(\Delta_1) \to 1$ ρίζα

Αν $0 < \lambda < 1$: 2 ρίζες

Αν $\lambda = 1$: 1 ρίζα

Αν $\lambda > 1$ αδύνατη

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x<0$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Για $0<x\le\frac{3\pi}{2}$ η f είναι συνεχής ως τριγωνομετρική.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1\\ f(0)=1\end{array}\right\}$$ η f είναι συνεχής στο 0 και επομένως συνεχής στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]$

Είναι:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax^3-3x^2-x+1}{x-0}-1=$$

$$\lim_{x\to0^-}(\alpha x^2-3x-1)$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2. (i) Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$

f(0)=1

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$ οπότε $f(0)\ne f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Άρα δεν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

(ii) Είναι $f'(x)=-\eta\mu x$ για $\xi\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$:

$$f'(\xi)=0\Leftrightarrow-\eta\mu\xi=0\overset{\xi\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow}\xi=\pi$$

Γ3. Για $x_0 < 0$: $f'(x_0) = 3\alpha x_0^2 - 6x_0 - 1$

$$\Delta = 36 + 12\alpha = 12(\alpha + 3) < 0$$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη, και επομένως δεν υπάρχει x_0 <0 ώστε f′(x_0)=0.

Γ4. Για x<0 : $f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1 < 0$

Για $0 < x \le \dfrac{3\pi}{2}$: $f'(x) = -\eta\mu x$

	-∞	0	π	$\frac{3\pi}{2}$
f'	-	-	0	+
f	↘	↘		↗

Αφού f′(x)<0, για x∈ (−∞, 0)∪(0, π) και είναι συνεχής στο x_0 =0, θα είναι γνησίως φθίνουσα στο (−∞ , π]

Και αφού f′(x) > 0 για x∈ $\left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ η f Θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, οπότε η f εμφανίζει ολικό ελάχιστο για x=π το f(π)=συνπ=−1, οπότε f(x)≥f(π) f(x) ≥ − 1.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\ln x = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x - \dfrac{1}{x} = 0$

$$K(x) = \ln x - \frac{1}{x}, \quad A_K = (0, +\infty)$$

$$K'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow K \uparrow$$

$$K \text{ συνεχής στο} [1, e]$$

$$\left.\begin{aligned} &K(1) = -1 < 0 \\ &K(e) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow K(1)K(e) < 0$$

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ $K(x_0)=0$

Και αφού $K\uparrow \Rightarrow x_0$ μοναδικό

Δ2. $f(x)=\ln x_0(x+1)-\ln x-1$

$$f'(x)=\ln x_0-\frac{1}{x}\overset{\ln x_0=\frac{1}{x_0}}{=}\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}=\frac{x-x_0}{x_0\cdot x}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=x_0$

	0		x_0		$+\infty$
f'		-	0	+	
f		↘		↗	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\ x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\ +\infty)$, οπότε εμφανίζει ολικό ελάχιστο στο $x=x_0$.

$$f(x_0)=\ln x_0(x_0+1)-\ln x_0-1=x_0\ln x_0-1=x_0\frac{1}{x_0}-1=0$$

Δ3. $g(x)=h(x)$

$$x\cdot e^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}$$

$\ln x-x=x\cdot\ln x_0-x+\ln x_0-1$

$\ln x_0(x+1)-\ln x-1=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x=x_0$

Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο πρέπει

$g'(x_0)=h'(x_0)$

$g'(x)=(x\cdot e^{-x})=e^{-x}-x\cdot e^{-x}$

$$h'(x)=\left[\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\right]=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)=$$

$$h'(=\left(\frac{x_0}{e}\right)^x \frac{x_0}{e}(\ln x_0 - 1) =$$

$$= \frac{x_0^x \cdot x_0}{e^x \cdot e}\left(\frac{1}{x_0} - 1\right) =$$

$$= \frac{x_0^x(1-x_0)}{e^x \cdot e}$$

Οπότε

$$g'(x_0) = h'(x_0)$$

$$e^{-x_0} - x_0 \cdot e^{-x_0} = \frac{{x_0}^{x_0}(1-x_0)}{e^{-x_0} \cdot e}$$

$$\frac{1-x_0}{e^{x_0}} = \frac{{x_0}^{x_0}(1-x_0)}{e^{x_0} \cdot e} \overset{x_0 \in (1,e)}{\Rightarrow}$$

$${x_0}^{x_0} = e \Leftrightarrow \ln {x_0}^{x_0} = \ln e$$

$$x_0 \cdot \ln x_0 = 1$$

$$x_0 \cdot \frac{1}{x_0} = 1$$

Δ4. Η κατακόρυφη απόσταση είναι

$$\left.\begin{array}{l} h(x) = |f(x) - \varphi(x)| \\ f(x) > \varphi(x) \text{ για κάθε } x_0 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow h(x) = f(x) - \varphi(x)$$

- Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε και η h είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με

  $h'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0)$

  Η h παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 από Θεώρημα Fermat: $h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

  $f'(x_0) - \varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \varphi'(x_0) = f'(x_0)$

  Και αφού η f έχει ελάχιστο στο $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

  Επομένως $\varphi'(x_0) = 0$

  Και έτσι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.

- Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.

Σχόλιο

- Το θέμα Α, ήταν θεωρία από το σχολικό βιβλίο, χωρίς να υπάρχουν ασάφειες.
- Το θέμα Β, ήταν ένα "πλούσιο" θέμα από ερωτήματα, τα οποία κάλυπταν ένα σημαντικό μέρος της ύλης. Εξέταζε βασικές γνώσεις των μαθητών, χωρίς να δημιουργεί καμία σύγχυση.
- Το θέμα Γ, αποτελούσε ένα πιο απαιτητικό θέμα. Ζητούσε από τους μαθητές να έχουν μια διευρυμένη εικόνα, τόσο από την ύλη της Γ Λυκειου, όσο και από γνώσεις προηγούμενων ετών. Έπρεπε οι μαθητές, να συνδυάσουν αυτές, για να ολοκληρώσουν και να τεκμηριώσουν τις απαντήσεις τους.
- Το θέμα Δ, ήταν ένα συνδυαστικό θέμα, που απευθυνόταν σε μαθητές με υψηλές δεξιότητες. Αν και το Δ1 ήταν άσκηση του σχολικού βιβλίου, τα επόμενα ερωτήματα απαιτούσαν μια βαθιά κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και ορισμών .

  Ταυτόχρονα, καθιστούσε αναγκαία την χρήση και τον εύστοχο χειρισμό ιδιοτήτων, των μαθηματικών "εργαλείων" , που διδάσκονται στους μαθητές στις μικρότερες Λυκειακές τάξεις.