ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΠΕΜΠΤΗ 18/06/2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΟΜΑΔΑ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ «ΕΞΕΛΙΞΗ»

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 16

Α2. **α.** Λ **β.** Σ **γ.** Λ

Α3.

α. $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

β. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

γ. $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

Α4. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 28-29

ΘΕΜΑ Β

Έστω η μεταβλητή Χ «αριθμός βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές»

Αφού δίνεται ότι το 40% των μαθητών δεν διάβασαν κανένα βιβλίο, έχουμε την επιπλέον πληροφορία ότι $f_1\%=40\%$, επομένως ο δοσμένος πίνακας γίνεται:

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0		**40**		
1				**70**
2	**10**			**90**
3		**10**		**100**
Σύνολο		**100**		

Β1. Είναι $v_3=10$ και $f_3\%=F_3\%-F_2\%=(90-70)\%=20\%$,

οπότε $f_3=0{,}2$ και αφού $f_3=\dfrac{v_3}{v}=\dfrac{10}{v}$,

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΕΠΑ.Λ
Κεντρικό Διδακτήριο: Βασ. Αμαλίας 1 & Μιλτιάδου, Πλατεία ΗΣΑΠ Αμαρουσίου, 151 22 Μαρούσι
τηλ.-fax: 210 8028560, 210 6129412 • www.exelixi.edu.gr • info@ekpedefsi.gr

Άρα $\frac{10}{v}=\frac{2}{10}\Leftrightarrow 2v=100\Leftrightarrow v=50$.

Αφού $f_1\%=40\%$, θα είναι $f_1=0,4$, και αφού $f_1=\frac{v_1}{v}=\frac{v_1}{50}$ οπότε

$\frac{v_1}{50}=\frac{4}{10}\Leftrightarrow 10v_1=200\Leftrightarrow v_1=20$

$N_1=20$ και $F_1\%=40\%$.

Είναι $f_2\%=F_2\%-F_1\%=(70-40)\%=30\%$, άρα $f_2=0,3$, και αφού $f_2=\frac{v_2}{v}=\frac{v_2}{50}$ οπότε

$\frac{v_2}{50}=\frac{3}{10}\Leftrightarrow 10v_2=150\Leftrightarrow v_2=15$

$N_2=v_1+v_2=35$

Και $N_3=N_2+v_3=35+10=45$

$v_4=v-N_3=50-45=5$

και $f_4=\frac{v_4}{v}=\frac{5}{50}=0,1$, $N_4=v=50$, οπότε ο πίνακας συμπληρωμένος γίνεται:

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0	20	**40**	20	40
1	15	30	35	**70**
2	**10**	20	45	**90**
3	5	**10**	50	**100**
Σύνολο	**50**	**100**		

Β2. Ζήτω ποσοστο για το οποίο Χ=3, οπότε το ζητούμενο ποσοστό είναι $p_z=10\%$.

Β3. Ζήτω πλήθος για το οποίο $X\geq 1$, οπότε το ζητούμενο πλήθος είναι $v_\zeta=v_2+v_3+v_4=30$.

Β4. Ζήτω πλήθος για το οποίο $0\leq X\leq 2$, οπότε αυτό είναι $v_\zeta=v_2+v_3+v_4=30$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3-\lambda x^2+2$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Γ1. Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(-1, -2), οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της,

οπότε $f(-1)=-2 \Leftrightarrow (-1)^3-\lambda(-1)^2+2=-2 \Leftrightarrow -1-\lambda+2=-2 \Leftrightarrow \lambda=3$, οπότε πλέον

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Γ2. Αφού $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, $x \in \mathbb{R}$

Θα είναι $f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 2)' = (x^3)' - (3x^2)' + (2)' = 3x^2 - 3 \cdot 2x = 3x^2 - 6x$, $x \in \mathbb{R}$ και

$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6$, $x \in \mathbb{R}$

Γ3. Αφού $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $x \in \mathbb{R}$,

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτων πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		+	0	-	0	+	
f		↗		↘		↗	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα↓ στο [0, 2] και

γνησίως αύξουσα στο($-\infty$, 0] , [2, $+\infty$). Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για x = 0 το f(0) = 2 και τοπικό ελάχιστο για x = 2 το xf(2)=2^3-3·2^2+2=-2

Γ4. Ζητείται το $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f'(x)+3}{f''(x)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - 6x + 3}{6x - 6}$

Είναι $\lim\limits_{x \to 1}(6x - 6) = 0$ και $\lim\limits_{x \to 1}(3x^2 - 6x + 3) = 0$, οπότε

με x «κοντά» στο x_0=1, έχουμε:

$$\frac{3x^2 - 6x + 3}{6x - 6} = \frac{3(x^2 - 2x + 1)}{6(x-1)} = \frac{3(x-1)^2}{6(x-1)} = \frac{3(x-1)}{6} = \frac{x-1}{2}\text{, οπότε}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)+3}{f''(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 6x + 3}{6x - 6} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2} = 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = (x^2 + 4x + 5)^{20}$

Δ1. Είναι ,

$f'(x) = [(x^2 + 4x + 5)^{20}]' = 20 \cdot (x^2 + 4x + 5)^{20-1}(x^2 + 4x + 5)'$

$f'(x) = 20 \cdot (x^2 + 4x + 5)^{19}(2x + 4) = 20 \cdot (x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot 2(x + 2)$

οπότε

$$f'(x)=40\cdot(x^2+4x+5)^{19}(x+2)$$

Δ2. Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=f'(-2)\overset{\Delta 1}{=}40[(-2)^2+4(-2)+5]^{19}(-2+2)=0$

Δ3. Έστω (ζ): y=λx+β η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης ευθείας.

Ζητώ το σημείο $B(x_0, f(x_0))$ στο οποίο η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της f, είναι παράλληλη στον άξονα x'x.

Η ευθεία αυτή θα έχει $\lambda=f'(x_0)=0$.

Είναι $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x)=40\cdot(x_0^2+4x_0+5)^{19}(x_0+2) \Leftrightarrow$

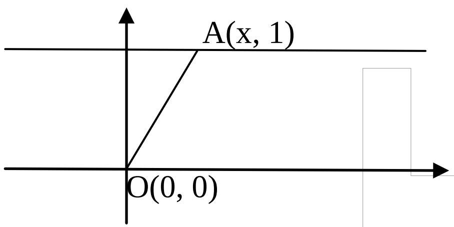
$(x_0^2+4x_0+5)^{19}=0$ ή $x_0+2=0 \Leftrightarrow x_0^2+4x_0+5=0$ ή $x_0=-2$

Και αφού η $x_0^2+4x_0+5$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, έχουμε μοναδική λύση το $x_0=-2$.

Το ζητούμενο σημείο επομένως είναι το B(-2, f(-2)) ή B(-2, 1).

Η ζητούμενη εξίσωση ευθείας είναι η (ζ): y=0·x+β και αφού το σημείο B(-2, 1) ανήκει στην ευθεία, οι συντεταγμένες του, επαληθεύουν την εξίσωσή της, οπότε y=1.

Δ3. Έστω A(x, 1), σημείο της ευθείας y=1.



Η απόσταση (ΟΑ)= $\sqrt{(x_A-x_O)^2+(y_A-y_O)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{x^2+1}$, άρα η συνάρτηση που δίνει την απόσταση είναι $d(x)=\sqrt{x^2+1}$, x>0 .

Είναι $d'(x)=(\sqrt{x^2+1})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ x>0.$

Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης ως προς x, όταν x=1 είναι

$$d'(1)=\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$