

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ &  
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡ/ΚΗΣ

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Αν οι συναρτήσεις  $f$ ,  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f + g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

**Μονάδες 7**

**A2.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού  $A$  και  $A_1$  το σύνολο των σημείων του  $A$  στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η πρώτη παράγωγος της  $f$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

**Μονάδες 4**

**A4.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση  $f$  με  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$  ή

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty \text{ »}.$$

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

(μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**A5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι **σωστή**, ή **ΛΑΘΟΣ** αν η πρόταση είναι **λανθασμένη**.

α) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) > 0$  για κάθε  $x$  κοντά στο  $x_0$ .

β) Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$ , παραγωγίσιμη στο  $(a, \beta)$  και  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (a, \beta)$ , τότε  $f(a) \neq f(\beta)$ .

γ) Για κάθε συνάρτηση  $f$  που είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$ ,  $x \in \mathbb{R} - \{3\}$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται στο  $\mathbb{R} - \{3\}$ .

**Μονάδες 5**

**B2.** Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις  $f$  και  $f^{-1}$  είναι ίσες.

**Μονάδες 8**

**B3.** Να αποδείξετε ότι  $(f \circ f)(x) = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{3\}$ .

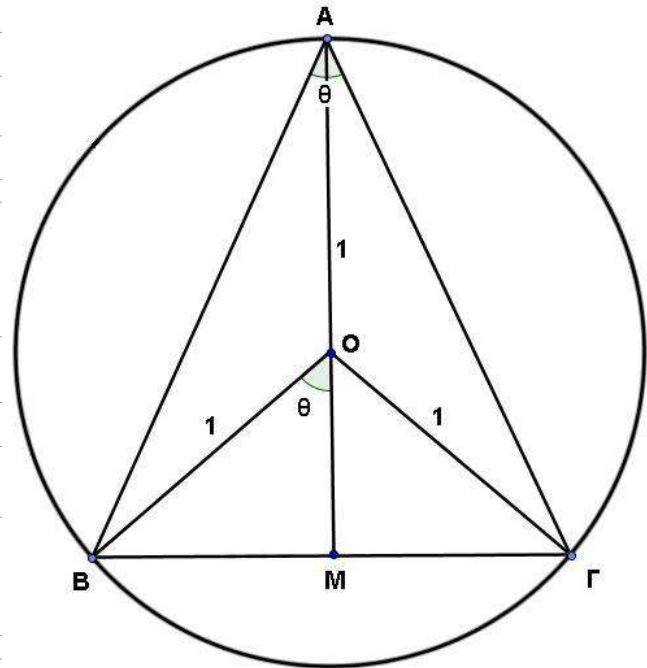
**Μονάδες 6**

**B4.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \left( f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right)$ .

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Γ

Ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα 1, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν  $\theta$  είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και  $\widehat{BOM} = \theta$ , τότε:



**Γ1.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως συνάρτηση της γωνίας  $\theta$  είναι:

$$E(\theta) = (1 + \cos\theta)\eta\mu\theta, \quad \theta \in (0, \pi).$$

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να βρείτε την τιμή της γωνίας  $\theta \in (0, \pi)$ , για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται.

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο γωνίες  $\theta_1, \theta_2$ , με  $\theta_1 < \theta_2$ , για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με  $\frac{3}{4}$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Για τις γωνίες  $\theta_1, \theta_2$ , του ερωτήματος **Γ3**, να αποδείξετε ότι υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in (0, \pi)$  τέτοια, ώστε:

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) E'(\xi_2).$$

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x \ln x - \ln(\lambda x), \quad x \in (0, +\infty), \quad \lambda \in (0, +\infty) \text{ και}$$

$$g(x) = x^x, \quad x \in (0, +\infty).$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x=1$ , το οποίο και να βρείτε. Στην συνέχεια, να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκει το σημείο ακρότατου της  $f$ , καθώς το  $\lambda$  μεταβάλλεται στο  $(0, +\infty)$ .

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του  $\lambda > 0$  για την οποία ισχύει

$$x^x \geq \lambda x, \text{ για κάθε } x > 0.$$

**Μονάδες 5**

Για τα ερωτήματα **Δ3** και **Δ4** θεωρήστε ότι  $\lambda = 1$ .

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $y = \lambda x$  είναι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης  $C_g$  της  $g$ , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση  $h(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι:

i. Η  $h$  είναι συνεχής

(Μονάδες 3)

ii. Η εξίσωση

$$x^{2020} \left( 3 - 2 \int_1^2 g(t) dt \right) + (1-x) \int_0^1 h(1-t) dt = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$ .

(Μονάδες 6)

**Μονάδες 9**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**