ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 2018

ΘΕΜΑ Α

Α1. 1η λύση

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$, οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=$$

1μ

2μ

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$$ αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

1μ

Επομένως, $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

4μ

2η λύση

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=$$

2μ

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$$ αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

1μ

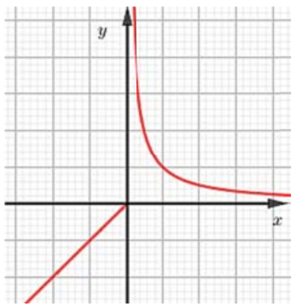
Επομένως, $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

1μ

Α2.α. Ψ

3μ

β. Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x, & x\leq 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ είναι 1-1 και δεν είναι γνησίως μονότονη.



Αν ο μαθητής κάνει οποιοδήποτε αντιπροσωπευτικό σχήμα δίνουμε όλες τις μονάδες. Αν το σχήμα δεν είναι στο R κόβουμε 1μ.

4μ

Α3. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

1μ η συνέχεια + 1μ παράγουσα +2μ ο τύπος

Α4. α) Λ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Σ

5x2 μονάδες

ΘΕΜΑ Β

8 μ
B1

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x)=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3}$

1μ

3 μ

Για κάθε $x<-2$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο -2, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$. Για κάθε $x\in(-2,0)$ είναι $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,0)$. Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

x	$-\infty$ -2	0	$+\infty$
x^3+8	-	+	+
x^3	-	-	+
f'	+	-	+
f	1 Τ.Μ	2	1

3μ το πρόσημο

1 μ
ακρότατο

Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(-2)=-2-1=-3$.

Αν δοθεί ακρότατο στο x=0 αφαιρούμε τη μονάδα του ακρότατου.

4 μ
B2

B2. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f''(x)=-\frac{24}{x^4}$.

1μ

Είναι $f''(x)<0$ για κάθε $x\neq 0$, οπότε η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

2μ η κυρτότητα

Επειδή η f είναι κοίλη στα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ δεν έχει σημεία καμπής.

1μ

6 μ
B3

2 μ κατα-
κόρυφη

B3. Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, οπότε αν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη θα είναι στο $x=0$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$ άρα η $x=0$ (y΄y) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

2+2μ

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0$, η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

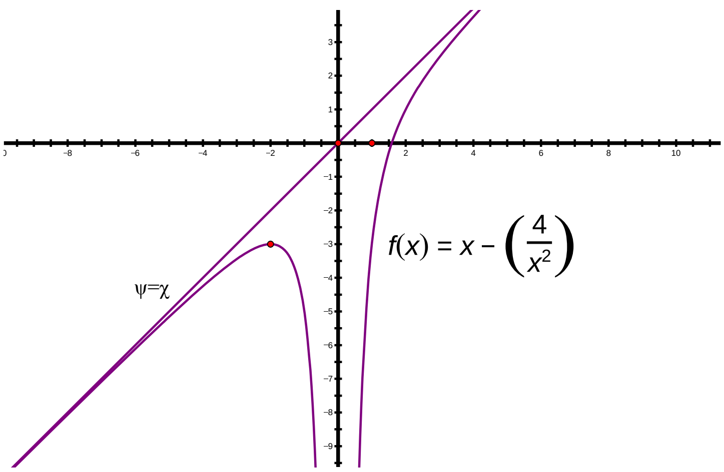
Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0$,άρα η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

7μ
B4

B4.

Να φαίνονται:

- Μονοτονία 2
- Ακρότατο 1
- Κυρτότητα 2
- Ασύμπτωτες 2



5μ Γ1

ΘΕΜΑ Γ

1μ τετράγωνο

Γ1. Επειδή με το τμήμα μήκους x κατασκευάζουμε τετράγωνο, η πλευρά του τετραγώνου έχει μήκος $\frac{x}{4}$m και εμβαδόν $\frac{x^2}{16}m^2$, $0<x<8$.

3μ κύκλος

Με το υπόλοιπο σύρμα μήκους $(8-x)$m κατασκευάζουμε κύκλο ακτίνας ρ, οπότε $2\pi\rho=8-x \Leftrightarrow \rho=\frac{8-x}{2\pi}$. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $\pi\rho^2=\pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2=\frac{(8-x)^2}{4\pi}$.

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι:

1μ

$$E(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{(8-x)^2}{4\pi}=\frac{4\pi x^2+4\left(64-16x+x^2\right)}{4\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},\ x\in(0,8)$$

10μ Γ2

Γ2. Η συνάρτηση Ε είναι παραγωγίσιμη στο $(0,8)$ με $E'(x)=\frac{2(\pi+4)x-64}{16\pi}=\frac{(\pi+4)x-32}{8\pi}$ 1 μ

Είναι $E'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(\pi+4)x-32}{8\pi}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq\frac{32}{4+\pi}$

4μ Μονοτονία

Για κάθε $x<\frac{32}{4+\pi}$ είναι $E'(x)<0$ άρα η Ε είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{32}{4+\pi}\right]$ και

για κάθε $x>\frac{32}{4+\pi}$ είναι $E'(x)>0$ άρα η Ε είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{32}{4+\pi},8\right)$.

1μ Ακρότατο

Η Ε παρουσιάζει ελάχιστο για $x=\frac{32}{4+\pi}$.

4μ

Τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι $\frac{x}{4}=\frac{8}{4+\pi}$ και η διάμετρος του κύκλου είναι $2\rho=....=\frac{8}{4+\pi}$

$2^{ος}$ τρόπος

Η Ε είναι παραβολή με $\alpha=\frac{\pi+4}{16\pi}>0$ οπότε παρουσιάζει ελάχιστο για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{32}{4+\pi}$ τα άλλα όμοια.

10μ Γ3

Γ3. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}E(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}=\frac{16}{\pi}>5$ γιατί $\frac{16}{5}=3,2>\pi$,

$E\left(\frac{32}{4+\pi}\right)=\frac{16}{\pi+4}$ και $\lim\limits_{x\to 8^-}E(x)=4$

2μ κάθε όριο και 2 η κορυφή. Σύνολο:6μ

1μ

Στο διάστημα $\Delta_1=\left(0,\frac{32}{4+\pi}\right]$ η Ε είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει σύνολο τιμών το $E(\Delta_1)=\left[\frac{32}{4+\pi},\frac{16}{\pi}\right)$.

1μ

Επειδή το 5 βρίσκεται στο εσωτερικό του $E(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό x_1 στο εσωτερικό του Δ_1 τέτοιο, ώστε $E(x_1)=5$.

1μ

Στο διάστημα $\Delta_2=\left[\frac{32}{4+\pi},8\right)$ η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει σύνολο τιμών το $E(\Delta_2)=\left[\frac{32}{4+\pi},4\right)$.

1μ

Επειδή το 5 δεν ανήκει στο $E(\Delta_2)$ η εξίσωση $E(x)=5$ είναι αδύνατη στο Δ_2 .

$2^{ος}$ τρόπος: Αν ορίσει ο μαθητής την $\varphi(x)=E(x)-5,\ x\in[0,8]$ και εφαρμόσει σωστά το θεώρημα Bolzano δίνουμε 5μ.

3ος τρόπος

$$E(x)=5 \Leftrightarrow \frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}=5 \Leftrightarrow (\pi+4)x^2-64x+256=80\pi \Leftrightarrow$$

$$(\pi+4)x^2-64x+16(16-5\pi)=0\ (1)$$

Η (1) έχει διακρίνουσα $\Delta=64(5\pi^2+4\pi)>0$ και ρίζες $x_{1,2}=\dfrac{64\pm 8\sqrt{5\pi^2+4\pi}}{2(\pi+4)}$ — 5 μ μέχρι εδώ

5μ

Το τριώνυμο (1) έχει $S>0,\ P>0$ άρα $x_1,x_2>0$.

$x_1<8 \Leftrightarrow \dfrac{64-8\sqrt{5\pi^2+4\pi}}{2(\pi+4)}<8 \Leftrightarrow \cancel{64}-8\sqrt{5\pi^2+4\pi}<16\pi+\cancel{64}$ ισχύει

$x_2>8 \Leftrightarrow \dfrac{64+8\sqrt{5\pi^2+4\pi}}{2(\pi+4)}>8 \Leftrightarrow \cancel{64}+8\sqrt{5\pi^2+4\pi}>16\pi+\cancel{64} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \pi^2+4\pi>0$ ισχύει

4ος τρόπος

$E(x)=5 \Leftrightarrow (\pi+4)x^2-64x+256-80\pi=0$

Έστω $f(x)=(\pi+4)x^2-64x+256-80\pi,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι

$f(0)=256-80\pi>0,\ f(8)=-16\pi<0$ και $f(10)=20\pi+16$ άρα το τριώνυμο έχει δύο ρίζες (επειδή αλλάζει πρόσημο), μια στο $(0,8)$ και μια $(8,10)$.

ΘΕΜΑ Δ

3μ Δ1

Δ1. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2e^{x-\alpha}-2x$ και $f''(x)=2e^{x-\alpha}-2$ — 1 μ Παράγωγοι

Είναι $f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}-2\geq 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}\geq 2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}\geq 1 \Leftrightarrow x-\alpha\geq 0 \Leftrightarrow x\geq\alpha$

Για κάθε $x<\alpha$ είναι $f''(x)<0$ άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,\alpha]$ και για κάθε $x>\alpha$ είναι $f''(x)>0$ άρα η f είναι κυρτή στο $[\alpha,+\infty)$. — 1 μ κυρτότητα

Η f έχει σημείο καμπής το $(\alpha,f(\alpha))\equiv(\alpha,2-\alpha^2)$ — 1 μ Σ.Κ

7μ Δ2

Δ2. Επειδή η f είναι κοίλη στο $(-\infty,\alpha]$, η $f'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. — 1 μ Μονοτονία **f′**

2μ

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^{x-\alpha}-2x)=+\infty$ και επειδή η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,\alpha]$, έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_1)=[2-2\alpha,+\infty)$.

Επειδή $\alpha>1$ είναι $2-2\alpha<0$ οπότε το μηδέν βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_1)$ και επομένως υπάρχει μοναδικό x_1 στο εσωτερικό του Δ_1 τέτοιο, ώστε $f'(x_1)=0$.

1μ

Αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x<x_1$ είναι $f'(x)>f'(x_1)=0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,x_1]$ και για κάθε $x_1<x<\alpha$ είναι $f'(x_1)>f'(x)=0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1,\alpha]$. Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1.

2μ

Επειδή η f είναι κυρτή στο $\Delta_2=[\alpha,+\infty)$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2e^{x-\alpha}-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(2\dfrac{e^{x-\alpha}}{x}-2\right)\right]=+\infty$ αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x-\alpha}}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x-\alpha}}{1}=+\infty$ και επειδή η f' επιπλέον είναι συνεχής έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_2)=[2-2\alpha,+\infty)$.Το μηδέν βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_2)$ και επομένως υπάρχει μοναδικό x_2 στο εσωτερικό του Δ_2 τέτοιο, ώστε $f'(x_2)=0$.

1μ — Αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $\alpha < x < x_2$ είναι $f'(x) < f'(x_2) = 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, x_2]$ και για κάθε $x > x_2$ είναι $f'(x) > f'(x_2) = 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_2, +\infty)$. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_2.

6μ Δ3

Δ3. Είναι $\alpha > 1 \Leftrightarrow -\alpha < -1 \Leftrightarrow 1-\alpha < 0 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} < 1 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} - 2 < 0 \Leftrightarrow f'(1) < 0$ άρα $1 \in (x_1, x_2)$. Όμως

4μ — $\alpha > 1$ άρα $1 \in (x_1, \alpha)$.

1^{ος} τρόπος

2μ — Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = f(1)$ (1), τότε επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, x_2]$ είναι και 1-1, οπότε από την (1) προκύπτει $x_0 = 1$ που είναι άτοπο.

2ος τρόπος

2μ — Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = f(1)$. Από το Θ.Rolle για την f στο $(1, x_0) \subseteq (x_1, x_2)$ υπάρχει $\xi \in (1, x_0)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$ που είναι άτοπο αφού οι ρίζες της f' είναι τα x_1, x_2.

2μ

3ος τρόπος

$f((\alpha, x_2)) = (f(x_2), f(\alpha))$, $1 < \alpha \overset{f \searrow (1,\alpha)(}{\Leftrightarrow} f(1) > f(\alpha)$ άρα $f(x) = f(1)$ αδύνατη.

9μ Δ4

Δ4. Για $\alpha = 2$ είναι $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$.

3μ — Είναι $f(2) = -2$ και $f'(2) = -2$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 2$ έχει εξίσωση:
$y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y = -2x + 2$.

3μ — Επειδή η f είναι κυρτή στο $[\alpha, +\infty)$ δηλαδή στο $[2, +\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, εκτός από το σημείο επαφής, άρα $f(x) \geq -2x + 2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 2$. Επειδή $\sqrt{x-2} \geq 0$, είναι $f(x)\sqrt{x-2} \geq (-2x+2)\sqrt{x-2}$ οπότε και

3μ —

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx \quad (2)$$

Θέτουμε $x - 2 = u \Leftrightarrow x = u + 2 \Rightarrow dx = du$

Για $x = 2$ είναι $u = 0$ και για $x = 3$ είναι $u = 1$, οπότε

$$\int_0^1 \left(-2(u+2)+2\right)\sqrt{u}\,du = \int_0^1 \left(-2u \cdot u^{\frac{1}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}\right)du = -2\int_0^1 \left(u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right)du =$$

$$= -2\left[\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -2\left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right) = -2 \cdot \frac{16}{15} = -\frac{32}{15} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2),(3) προκύπτει ότι $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}$

Υπενθυμίσεις:

∗ Στο βαθμολόγιο , στα κελιά όπου δεν αντιστοιχούν ερωτήσεις θεμάτων το αφήνουμε κενό ή βάζουμε παύλα

∗ Μόνο ο **Β΄ βαθμολογητής** σημειώνει στο γραπτό τα σύμβολα:

+ (σταυρός ένας ή περισσότεροι: έλλειψη - παράλειψη), __ (υπογράμμιση, απλή ή διπλή : σφάλμα) ,
/; (μικρή γραμμή με ερωτηματικό στο περιθώριο: αδυναμία, ατέλεια, ασάφεια αοριστολογία κλπ) ,
( ) (παρένθεση: περιττό, αφαιρετέο ως μη ζητηθέν, εκτός θέματος)