ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 2017

ΘΕΜΑ Α

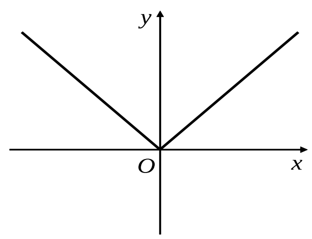
Α1. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

α: 1 μονάδα
β: 3 μονάδες

Α2. α. Ψ

β. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1$, ενώ $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{x} = -1$.



Μόνο το σχήμα με το γωνιακό σημείο: 1 μόριο
Το σχήμα με δικαιολόγηση (συνεχής στο 0 και μη παραγωγίσιμη): 3 μονάδες
Μόνο το $f(x) = |x|$: 1 μονάδα

2 το διάστημα
και 2 τα όρια

Α3. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον $\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$

Α4. α) Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ

5x2 μονάδες

ΘΕΜΑ Β

Β1. $A_{f \circ g} = \{x \in A_g \;/\; g(x) \in A_f\} = \left\{x \neq 1 / \dfrac{x}{1-x} > 0\right\} = \{x \neq 1 / x \in (0,1)\} = (0,1)$

3

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.

2 μονάδες

Β2. Αρκεί για κάθε $x \in (0,1)$ η εξίσωση $h(x) = y$ να έχει μοναδική λύση για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Είναι $h(x) = y \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right) = y \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow x = e^y - xe^y \Leftrightarrow x + xe^y = e^y \Leftrightarrow x(e^y + 1) = e^y \Leftrightarrow$

$x = \dfrac{e^y}{e^y + 1}$, άρα $h^{-1}(y) = \dfrac{e^y}{e^y + 1}$, $y \in \mathbb{R}$ οπότε $h^{-1}(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Η παραπάνω λύση θεωρείται άρτια και βαθμολογείται πλήρως. Σε αντίθετη περίπτωση χρειάζεται το 1-1 και κόβουμε από την επίλυση αναλόγως. (Μη χρήση ισοδυναμίας 2 μονάδες)

3 μονάδες

Β3. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\varphi'(x)=\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$. Είναι $\varphi'(x)>0 \Rightarrow \varphi \uparrow \mathbb{R}$, οπότε η φ δεν έχει ακρότατα.

3 μονάδες

Η φ′ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\varphi''(x)=\dfrac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}$.

$$\varphi''(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}\geq 0 \underset{\left(e^x+1\right)^3>0}{\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}} 1-e^x\geq 0 \Leftrightarrow e^x\leq 1 \Leftrightarrow x\leq 0.$$

Για κάθε $x<0$ είναι $\varphi''(x)>0$ άρα η φ είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι $\varphi''(x)<0$ άρα η φ είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$.

Η φ έχει σημείο καμπής το $A(0,\varphi(0))\equiv\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

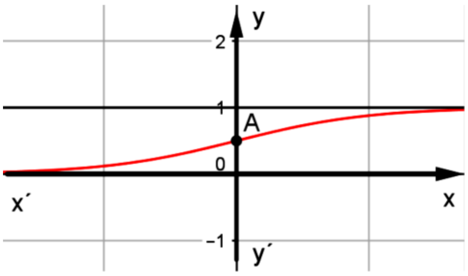
1 μονάδα

2 μονάδες

Β4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{0}{0+1}=0$ γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, οπότε ο άξονας x΄x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $-\infty$.

2 μονάδες

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(1+e^{-x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+e^{-x}}=1$, άρα η $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $+\infty$.



3 μονάδες

ΘΕΜΑ Γ

2 μονάδες

Γ1. Έστω $M(\alpha, f(\alpha))$, το σημείο επαφής της εφαπτομένης (ε) στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , τότε $(\varepsilon): y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha)$ και $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ σημείο της (ε)

άρα $-\frac{\pi}{2} - (-\eta\mu\alpha) = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sigma\upsilon\nu\alpha$, αφού $f'(\alpha) = -\sigma\upsilon\nu\alpha$.

4 μονάδες

Θεωρούμε τη συνάρτηση λ, με $\lambda(\alpha) = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sigma\upsilon\nu\alpha - \frac{\pi}{2} + \eta\mu\alpha$, $\alpha \in [0, \pi]$.

Είναι $\lambda(0) = 0$ και $\lambda(\pi) = 0$, όμως η λ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με:

2 μονάδες

$$\lambda'(\alpha) = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha = \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\eta\mu\alpha$$

$$\lambda'(\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\eta\mu\alpha \geq 0 \overset{\eta\mu\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha - \frac{\pi}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq \frac{\pi}{2}$$

2 μονάδες

Για κάθε $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\lambda'(\alpha) > 0 \Rightarrow \lambda$ γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και για κάθε $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ είναι $\lambda'(\alpha) < 0 \Rightarrow \lambda$ γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Οπότε η $\alpha = 0$ μοναδική ρίζα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και η $\alpha = \pi$ μοναδική ρίζα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

2 μονάδες

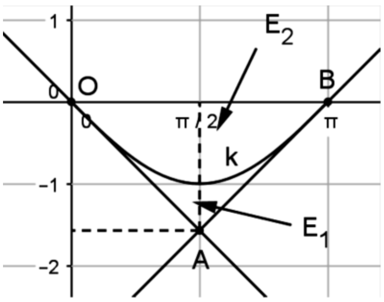
Για $\alpha = 0$ η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $(\varepsilon_1): y = -x$ και

για $\alpha = \pi$ η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $(\varepsilon_2): y = x - \pi$

Γ2. Είναι $E_2 = -\int_0^{\pi} -\eta\mu x dx = 2$ και — 2 μονάδες

$E_1 = (OAB) - E_2 = \frac{\pi^2}{4} - 2$, — 3 μονάδες

οπότε $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$ — 1 μονάδα



Γ3. Είναι $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x-\eta\mu x}{\pi-x-\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to\pi}(x-\eta\mu x)\dfrac{1}{\pi-x-\eta\mu x}$

1ος τρόπος

2 μονάδες

Έστω συνάρτηση φ, με $\varphi(x)=\pi-x-\eta\mu x,\ x\in(0,\pi)$

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $\varphi'(x)=-1-\sigma\upsilon\nu x$.

Είναι $\varphi'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\pi)$.

Για κάθε $x<\pi\Rightarrow\varphi(x)>0$, άρα

2 μονάδες

$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{\pi-x-\eta\mu x}=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x-\eta\mu x)=0$ και $\lim\limits_{x\to\pi}(x-\eta\mu x)=\pi>0$, άρα

$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x-\eta\mu x}{\pi-x-\eta\mu x}=+\infty$

2ος τρόπος

2 μονάδες

Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα $[0,\pi]$ εκτός του σημείου επαφής, άρα $f(x)\ge x-\pi\Leftrightarrow-\eta\mu x\ge x-\pi\Leftrightarrow\pi-x-\eta\mu x\ge 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=\pi$. Άρα $\pi-x-\eta\mu x>0$.

3ος τρόπος

Έστω συνάρτηση φ, με $\varphi(x)=\pi-x-\eta\mu x,\ x\in(0,\pi)$.

Είναι $\varphi'(x)=-1-\sigma\upsilon\nu x<0$.

Η φ ικανοποιεί Θ.Μ.Τ στο $[x,\pi]$, άρα υπάρχει $\xi\in(x,\pi)$, ώστε $\varphi'(\xi)=\dfrac{\cancel{\varphi(\pi)}^{0}-\varphi(x)}{\pi-x}<0$

Επειδή $\pi-x>0$ είναι $-\varphi(x)<0\Leftrightarrow\ \varphi(x)>0$, οπότε $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x-\eta\mu x}{\pi-x-\eta\mu x}=+\infty$

4ος τρόπος

Για κάθε $x\in(0,\pi)$ είναι $|\eta\mu(\pi-x)|<\pi-x\Leftrightarrow-\pi+x<\eta\mu x<\pi-x\Rightarrow\pi-x-\eta\mu x>0$

3 μονάδες

Γ4. Επειδή η f είναι κοίλη βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα $[0,\pi]$ εκτός του σημείου επαφής, άρα $f(x)>x-\pi\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}>1-\dfrac{\pi}{x},\ x\in(0,\pi)$ άρα

4 μονάδες

$\int_1^e\dfrac{f(x)}{x}dx>\int_1^e\left(1-\dfrac{\pi}{x}\right)dx=[x-\pi\ln x]_1^e=e-1-\pi$

2ος τρόπος

Αρκεί να αποδείξουμε $\int_1^e\dfrac{\eta\mu x}{x}dx<\pi+1-e$.

Είναι $\int_1^e\dfrac{\eta\mu x}{x}dx=\int_1^{\pi/2}\dfrac{\eta\mu x}{x}dx+\int_{\pi/2}^{e}\dfrac{\eta\mu x}{x}dx$

$1\le x\le\pi/2\Rightarrow\eta\mu 1\le\eta\mu x\le 1\Rightarrow\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{1}{x}\Rightarrow\int_1^{\pi/2}\dfrac{\eta\mu x}{x}dx<\int_1^{\pi/2}\dfrac{1}{x}dx=\ln(\pi/2)$

$\pi/2\le x\le e\Rightarrow\eta\mu e\le\eta\mu x\le 1\Rightarrow\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{1}{x}\Rightarrow\int_{\pi/2}^{e}\dfrac{\eta\mu x}{x}dx<\int_{\pi/2}^{e}\dfrac{1}{x}dx=1-\ln(\pi/2)$

άρα $\int_1^{\pi/2}\dfrac{\eta\mu x}{x}dx+\int_{\pi/2}^{e}\dfrac{\eta\mu x}{x}dx<1<\pi+1-e$

Γ4. 3ος τρόπος

Αρκεί να αποδείξουμε $\int_1^e \frac{\eta\mu x}{x}dx < \pi+1-e \Leftrightarrow \int_1^e \frac{\eta\mu x}{x}dx + \int_1^e 1dx < \pi \Leftrightarrow \int_1^e \frac{\eta\mu x + x}{x}dx < \pi$

Για κάθε $x \in (1,e)$ είναι: $\eta\mu x \le 1 \Rightarrow \eta\mu x + x \le 1 + x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x + x}{x} \le 1 + \frac{1}{x}$, άρα

$\int_1^e \frac{\eta\mu x + x}{x}dx < \int_1^e (1+\frac{1}{x})dx = e - 1 + 1 - 0 = e < \pi$

ΘΕΜΑ Δ

1 μονάδα

Δ1. Είναι $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 1 = f(-1)$, $\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x) = 0 = f(\pi)$ οπότε η f είναι συνεχής στο -1 και στο π.

Η f είναι συνεχής στο $[-1,0)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Η f είναι συνεχής στο $(0,\pi]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Στο $x_0 = 0$ είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt[3]{x^4} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (e^x \eta\mu x) = 0 = f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$ άρα είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

1 μονάδα

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$ με $f'(x) = \left(|x|^{\frac{4}{3}}\right)' = \left[(-x)^{\frac{4}{3}}\right]' = -\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f'(x) = e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$

1 μονάδα

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{-(-x)} = \lim\limits_{x\to 0^-}\left[-(-x)^{\frac{1}{3}}\right] = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^x \frac{\eta\mu x}{x} = 1$,

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και επειδή είναι συνεχής στο σημείο αυτό, η f έχει κρίσιμο σημείο το $x_0 = 0$.

2 μονάδες

Για κάθε $x \in (-1,0)$ είναι $f'(x) < 0$

Για κάθε $x \in (0,\pi)$ είναι:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x$ (1)

1ος τρόπος

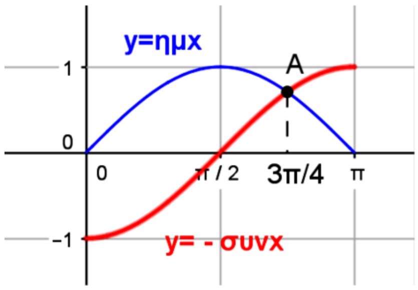
$\eta\mu x \ne 0$ στο $(0,\pi)$ οπότε η (1) γίνεται: $\sigma\varphi x = -1,\ x \in (0,\pi) \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

2ος τρόπος

Παρατηρούμε ότι η (1) έχει προφανή λύση την $x = \frac{3\pi}{4}$.

Από τις γραφικές παραστάσεις των $y = \eta\mu x$ και $y = -\sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0,\pi]$ παρατηρούμε ότι η προφανής λύση είναι μοναδική.

Άρα η f έχει κρίσιμο σημείο το $x = \frac{3\pi}{4}$.



Δ2. Για κάθε $x \in (-1,0)$ είναι $f'(x) = -\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}} < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$.

Μονοτονία
3 μονάδες

1ος τρόπος

Είναι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ και επειδή η f' είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό.

Επειδή $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} > 0$, είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Διάστημα	$\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$
επιλεγμένο x_0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
$f'(x_0)$	$e^{\frac{\pi}{2}}$	$e^{\frac{5\pi}{6}}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$
πρόσημο f'	+	–
f	1	2

Είναι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ και επειδή η f' είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Επειδή $f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = e^{\frac{5\pi}{6}}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) < 0$, είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

Δ2.

2ος τρόπος

Από τις γραφικές παραστάσεις των $y = \eta\mu x$ και $y = -\sigma\upsilon\nu x$ του Δ1 παρατηρούμε ότι

Μονοτονία 3 μονάδες

$\eta\mu x > -\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$. Ακόμη $\eta\mu x < -\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ και επειδή η f' είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

Ακρότατα 2 μονάδες

Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(-1) = 1$, τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 0$, τοπικό μέγιστο το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}$ και τοπικό ελάχιστο το $f(\pi) = 0$.

Σύνολο τιμών 1 μονάδα

Στο διάστημα $\Delta_1 = [-1, 0]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = [0, 1]$.

Στο διάστημα $\Delta_2 = \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$.

Στο διάστημα $\Delta_3 = \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_3) = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$.

Είναι $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = [0, 1] \cup \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$

Είναι $1 < \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} < e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow \sqrt{2} < e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow \ln 2^{\frac{1}{2}} < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 2 < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \ln 2 < \frac{3\pi}{2}$ που ισχύει αφού $\ln 2 < 1$ και $\frac{3\pi}{2} > 1$, οπότε $f(A) = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$.

Δ2. 3ος τρόπος

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1, \pi]$ το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα, είναι το ελάχιστό της και το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστό της.

Είναι $1 < \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} < e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow \sqrt{2} < e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow \ln 2^{\frac{1}{2}} < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 2 < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \ln 2 < \frac{3\pi}{2}$ που ισχύει αφού $\ln 2 < 1$ και $\frac{3\pi}{2} > 1$, οπότε $f(A) = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$.

Ορισμός εμβαδού + απαλλαγή απολύτου 3 μονάδες

Δ3. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $E = \int_0^{\pi} \left| e^x \eta\mu x - e^{5x} \right| dx$

1 μονάδα

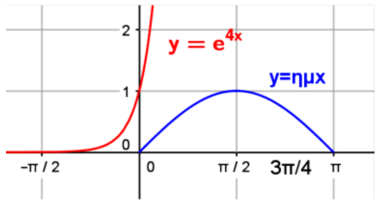
2 μονάδες το

1ος τρόπος

Είναι $e^x ημx - e^{5x} = e^x\left(ημx - e^{4x}\right) < 0$ για κάθε $x \in [0,\pi]$ γιατί $ημx \le 1$, $e^{4x} \ge 1$ και η ισότητα δεν ισχύει ταυτόχρονα ($x = \frac{\pi}{2}$ και $x = 0$)

2ος τρόπος

Σχεδιάζοντας τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = ημx$ και $y = e^{4x}$ παρατηρούμε ότι $ημx < e^{4x}$ για κάθε $x \in [0,\pi]$, άρα $e^x ημx - e^{5x} = e^x\left(ημx - e^{4x}\right) < 0$



Υπολογισμός ολοκληρωμάτων 3 μονάδες

Είναι $I = \int_0^\pi e^x ημx dx = \int_0^\pi \left(e^x\right)' ημx dx = \left[e^x ημx\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x συνx dx = -\int_0^\pi \left(e^x\right)' συνx dx =$

$-\left[e^x συνx\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^x(-ημx)dx = e^\pi + 1 - I \Leftrightarrow 2I = e^\pi + 1 \Leftrightarrow I = \frac{e^\pi + 1}{2}$

$E = \int_0^\pi \left|e^x ημx - e^{5x}\right| dx = \int_0^\pi \left(e^{5x} - e^x ημx\right)dx = \int_0^\pi e^{5x} dx - I = \left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^\pi - \frac{e^\pi + 1}{2} = \frac{2e^{5\pi} - 5e^\pi - 7}{10}$

3 μονάδες

Δ4. $16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow f(x) - \frac{(4x-3\pi)^2}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$

$f(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{(4x-3\pi)^2}{16}$ (1)

Προφανής ρίζα: 1 μοναδικότητα : 4

Επειδή η f έχει μέγιστο το $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}$, είναι $f(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \le 0$ για κάθε $x \in [-1,\pi]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \frac{3\pi}{4}$.

Όμως $\frac{(4x-3\pi)^2}{16} \ge 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \frac{3\pi}{4}$, οπότε η (1) ισχύει μόνο όταν $x = \frac{3\pi}{4}$.